

О понятии свертки

28/10

$$(1) \quad u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

Фундамент. реш-е: $p_a(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(x-s, t) \varphi(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3)$$

(P) - реш-е ЗК (1)

(P) - свертка функ. реш-я с нач. усл-ем

Опр. свертки $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Уч

сверткой на оси $\mathbb{R}$ наз-ся ф-ция $f_1 * f_2(x)$
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-s) f_2(s) ds, x \in \mathbb{R}$

обозн.
свертки

Элементар. св-ва свертки:

1) $f_1 * f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

2) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (коммутативность свертки)

3) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность свертки)

Упр: проверить св-ва (2) - (3)

ИФ и свертки $f_1 * f_2(x) \longleftrightarrow F_1(\xi) F_2(\xi)$

где $f_1(x) \longleftrightarrow F_1(\xi), f_2(x) \longleftrightarrow F_2(\xi)$

ИФ от свертки = произведению

ИФ от свертываемых сомножителей

▲ $f_1 * f_2(x) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 * f_2(x) e^{-i\xi x} dx =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-s) f_2(s) ds \right) e^{-i\xi x} dx =$ меняем

порядок интегр. $= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(s) ds \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-s) \cdot$

$\cdot e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(s) e^{-i\xi s} ds = e^{-i\xi(x-s)} e^{-i\xi s} =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(s) e^{-i\xi s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-s) e^{-i\xi(x-s)} dx =$ внутр.

интегр. с-ва: $\tau = x-s \Leftrightarrow x = \tau+s \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(s) e^{-i\xi s} ds$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-i\tau s} d\tau}_{\text{не зависит от } s} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-i\tau s} d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(s) e^{-i\tau s} d\tau \right)$$

$$e^{-i\tau s} d\tau = F_1(\xi) F_2(\xi) \blacksquare$$

Откуда взялась свертка в ф-ле (P)?
 // Наблюдение: в ходе реш-я зад (1) было получено выражение: $U(\xi, t) = e^{-a^2 \xi^2 t}$

$$\Phi(\xi), \text{ где } \Phi(\xi) \longleftrightarrow \varphi(x) //$$

$$\text{Вопрос: } e^{-a^2 \xi^2 t} \longleftrightarrow ?$$

$$\text{ОДП: } e^{-a^2 \xi^2 t} \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} (\underbrace{\cos \xi x}_{\text{четный}} + i \underbrace{\sin \xi x}_{\text{нечетный}}) d\xi = \frac{1}{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos \xi x d\xi = \int \text{нужна } \frac{\pi}{2}, \alpha = a^2 t,$$

$$\beta = x \} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \equiv$$

$$\equiv p_a(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$U(\xi, t) = e^{-a^2 \xi^2 t} \Phi(\xi) \xleftrightarrow{\text{ОДП}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(x-s, t) \varphi(s) ds = U(x, t) - \text{ф-ла (P)}$$

$$\left[\xi^2 \Phi(\xi) - \text{не свертка, т.к. } \longleftrightarrow -\varphi''(x) \right] \text{ (в классич. смысле)}$$

$$// \xi^2 \longleftrightarrow -\frac{d^2}{dx^2} // \text{Упр: Показать, что } p_a(\cdot, t_1) * p_a(\cdot, t_2) = p_a(\cdot, t_1 + t_2), \text{ т.е. } \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(x-s, t_1) p_a(s, t_2) ds = p_a(x, t_1 + t_2)$$

$$\rho_a(s, t_2) dS = \rho_a(x, t_1 + t_2), \forall t_1, t_2 > 0$$

Дать „философское“ объяснение этому тождеству

Раздел 2. Уравнение Лапласа

Оператор Лапласа и его св-ва

Ситуация: $x \in \mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$
(почти всегда)

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — сферич. радиус ~~т.е.~~ $x \in \mathbb{R}^n$

Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Важный частный случай: $n=3$,

$$x = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x, y, z), \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

$$n=2, x = (x_1, x_2) \rightarrow (x, y), \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$[n=1, x = (x_1) \rightarrow (x), \Delta u = u_{xx}, \text{ т.е. } \Delta \equiv \frac{d^2}{dx^2} - \text{одномерный оператор Лапласа}]$$

Основные ур-ния, связанные с оператором Лапласа

1) однородное ур-ние: $\Delta u = 0$ (ур-ние Лапласа)

б) неоднород. ур-ние: $\Delta u = f$ (ур-ние Пуассона)

Физические приложения:

I) Теория потенциала (гравитация, электростатика, магнетизм и т.д.)

II) Стационарные задачи теплопроводности

$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$, $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ — усл. стационарности $\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ — ур-ние стационар. теплопр-ти (ур-ние Лапласа)

Теплопр-ть с источниками:

$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + g(x, y, z)$, где $g(x, y, z)$ — ф-ция плотности стационар. источников тепла

$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ — усл. стационарности $\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f$,

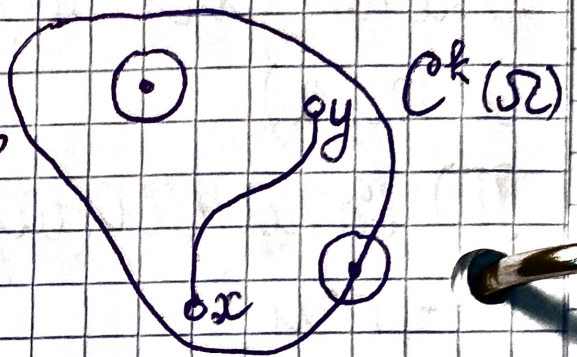
$f = -\frac{1}{a^2} g$ (ур-ние Пуассона / ур-ние стационар. теплопр-ти с источниками тепла)

Нужные нескот. технич. приемы д/рабо-
ты с оп-ом Лапласа.

Эл-ты вектор-го анализа // Напоминание

$x \in \mathbb{R}^n, n \geq 2, x = (x_1, \dots, x_n), |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$,

Ω - обл-ть в $\mathbb{R}^n$ (огранич.
(откр. связн. мн-во) или неогр.),



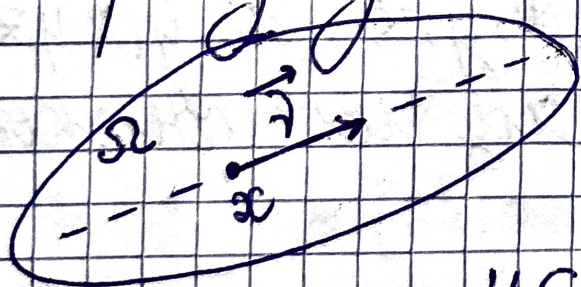
$\partial\Omega$ - граница обл-ти,

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ - замкн. обл-ть.
(замыкание)

Важный класс ф-ций: $C^k(\bar{\Omega})$ - ф-ции,
имеющие в Ω ^{непрерывные} ч.п. пор-ка $\leq k$, непр
продолжаемые на $\bar{\Omega}$

$u \in C^k(\Omega_0)$ и $\bar{\Omega} \subset \Omega_0 \Rightarrow u \in C^k(\bar{\Omega})$

Производная по направлению



$\vec{\gamma} = \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ - вы-
деленный в-р

$u \in C^1(\Omega), x \in \Omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = \frac{d}{ds} u(x + s\gamma) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (x_1 + s\gamma_1, \dots, x_n + s\gamma_n) \Big|_{s=0}$$

$$= \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \dots + \gamma_n \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = (\vec{\gamma}, \nabla u(x)) -$$

- произв-ая от ф-ции u в т. x по направ-

лению в-ра $\vec{\gamma}$

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = (\vec{\gamma}, \nabla u(x)), \text{ где } \nabla u = \text{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\}$$

0,1

If $u \in C^1(\bar{\Omega})$, то ф-ла дает ф-цию
 $\frac{\partial u}{\partial \gamma} \in C(\Omega)$